CI3725 - Traductores e Interpretadores
Abril-Julio 2006
Prof. Ernesto Hernández-Novich

Laboratorio Semana IV

Minimización de AFD

Sea $M =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$ un AFD. El siguiente algoritmo permite construir M' equivalente, pero con el número mínimo de estados.

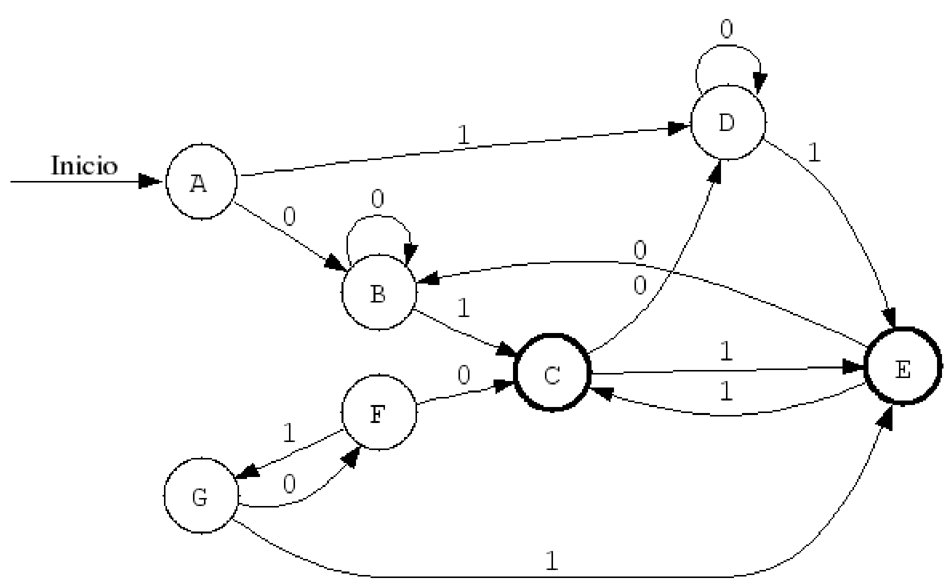
1. Eliminar los estados inaccesibles de M. Se utiliza el algoritmo de Búsqueda en Profundidad sobre grafos para encontrar la componente conexa a partir de q_0. Todos los estados que **no** estén en esa componente conexa son eliminados de M junto con sus transiciones asociadas.

2. Construir las relaciones de equivalencia $\equiv^0, \equiv^1, \ldots$ hasta que $\equiv^{k+1} = \equiv^k$. Escoger $\equiv^{k+1}$como la relación de equivalencia $\equiv$definitiva.

3. Construir $M' =< Q', \Sigma, \delta', q'_o, F' >$ tal que

   - Q' es el conjunto de clases de equivalencia según $\equiv$. Hay dos notaciones comunes:
     a) Denotar el estado como el conjunto, e.g. $\{q_0, q_1, \ldots\}$. Esta es la que yo prefiero y uso en los ejercicios.
     b) Denotar el estado usando un "representante" cualquier del conjunto entre corchetes, e.g. $[q_0]$.
   - q'_0 será la clase de equivalencia que contenga a q_0. En el segundo estilo de notación, $q'_0 = [q_0]$.
   - F' será el conjunto de clases de equivalencia tales que contengan alguno de los estados finales de M. En el segundo estilo de notación, $F' = \{[q] | q \in F\}$.
   - δ' se construye usando δ para determinar las transiciones entre las clases de equivalencia. En el segundo estilo de notación, $\delta'([p], a) = [q] \iff \delta(p, a) = q$.

Ejemplo 1: Minimize el DFA



Comenzamos por observar que los estados F y G son inalcanzables, así que se eliminan del DFA incluyendo las transiciones asociadas. Calculamos entonces la relación de equivalencia:

- $\equiv^0 = \{\{A,B,D\},\{C,E\}\}$. Por definición, $\equiv^0$ comienza con dos clases de equivalencia: $Q\backslash F$ y F.
- $\equiv^1 = \{\{A\},\{B,D\},\{C,E\}\}$. Puesto que:

$$\begin{array}{rcl}
A \text{ y } B & : & \delta(A,0)=B \wedge \delta(B,0)=B \rightarrow B \equiv^0 B \\
 & & \delta(A,1)=D \wedge \delta(B,1)=C \rightarrow D \not\equiv^0 C \\
 & \Rightarrow & A \not\equiv^1 B \\
A \text{ y } D & : & \delta(A,0)=B \wedge \delta(D,0)=D \rightarrow B \equiv^0 D \\
 & & \delta(A,1)=D \wedge \delta(D,1)=E \rightarrow D \not\equiv^0 E \\
 & \Rightarrow & A \not\equiv^1 D \\
B \text{ y } D & : & \delta(B,0)=B \wedge \delta(D,0)=D \rightarrow B \equiv^0 D \\
 & & \delta(B,1)=C \wedge \delta(D,1)=E \rightarrow C \equiv^0 E \\
 & \Rightarrow & B \equiv^1 D \\
C \text{ y } E & : & \delta(C,0)=D \wedge \delta(E,0)=B \rightarrow D \equiv^0 B \\
 & & \delta(C,1)=E \wedge \delta(E,1)=C \rightarrow E \equiv^0 C \\
 & \Rightarrow & C \equiv^1 E
\end{array}$$

- $\equiv^2 = \{\{A\},\{B,D\},\{C,E\}\}$. Puesto que

$$\begin{array}{rcl}
B \text{ y } D & : & \delta(B,0)=B \wedge \delta(D,0)=D \rightarrow B \equiv^1 D \\
 & & \delta(B,1)=C \wedge \delta(D,1)=E \rightarrow C \equiv^1 E \\
 & \Rightarrow & C \equiv^2 E \\
C \text{ y } E & : & \delta(C,0)=D \wedge \delta(E,0)=B \rightarrow D \equiv^1 B \\
 & & \delta(C,1)=E \wedge \delta(E,1)=C \rightarrow E \equiv^1 C \\
 & \Rightarrow & C \equiv^2 E
\end{array}$$

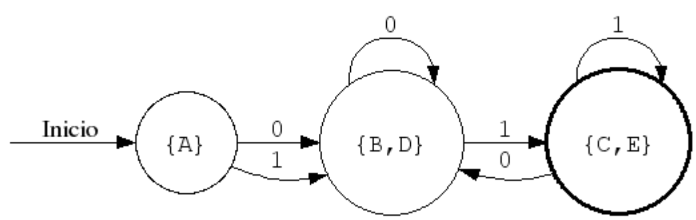
- Como $\equiv^1 = \equiv^2$ tomamos $\equiv^2$ como $\equiv$ definitiva y construimos el autómata mínimo como

$$M' =< \{\{A\},\{B,D\},\{C,E\}\},\{0,1\},\delta',\{A\},\{\{C,E\}\} >$$

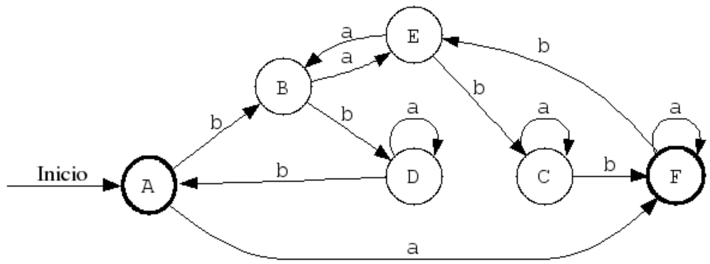
con δ' definida como

$$\begin{array}{rcl}
\delta'(\{A\},0) & = & \{B,D\} \\
\delta'(\{A\},1) & = & \{B,D\} \\
\delta'(\{B,D\},0) & = & \{B,D\} \\
\delta'(\{B,D\},1) & = & \{C,E\} \\
\delta'(\{C,E\},0) & = & \{B,D\} \\
\delta'(\{C,E\},1) & = & \{C,E\}
\end{array}$$

y obtenemos la representación gráfica



Ejemplo 2: Minimize el DFA



En este caso no hay estados inalcazables, de manera que pasamos a calcular la relación de equivalencia:

- $\equiv^0 = \{\{B, C, D, E\}, \{A, F\}\}$. Por definición, $\equiv^0$ comienza con dos clases de equivalencia: $Q \backslash F$ y F.
- $\equiv^1 = \{\{B, E\}, \{C, D\}, \{A, F\}\}$. Puesto que

$$
\begin{array}{rcl}
B \text{ y } C & : & \delta(B,a) = E \wedge \delta(C,a) = C \to E \equiv^0 C \\
 & & \delta(B,b) = D \wedge \delta(C,b) = F \to D \not\equiv^0 F \\
 & \Rightarrow & B \not\equiv^1 C \\
B \text{ y } D & : & \delta(B,a) = E \wedge \delta(D,a) = D \to E \equiv^0 D \\
 & & \delta(B,b) = D \wedge \delta(D,b) = A \to D \not\equiv^0 A \\
 & \Rightarrow & D \not\equiv^1 A \\
B \text{ y } E & : & \delta(B,a) = E \wedge \delta(E,a) = B \to E \equiv^0 B \\
 & & \delta(B,b) = D \wedge \delta(E,b) = C \to D \equiv^0 C \\
 & \Rightarrow & B \equiv^1 E \\
C \text{ y } D & : & \delta(C,a) = C \wedge \delta(D,a) = D \to C \equiv^0 D \\
 & & \delta(C,b) = F \wedge \delta(D,b) = A \to F \equiv^0 A \\
 & \Rightarrow & C \equiv^1 D \\
A \text{ y } F & : & \delta(A,a) = F \wedge \delta(F,a) = F \to F \equiv^0 F \\
 & & \delta(A,b) = B \wedge \delta(F,b) = E \to B \equiv^0 E \\
 & \Rightarrow & A \equiv^1 F
\end{array}
$$

- $\equiv^2 = \{\{B, E\}, \{C, D\}, \{A, F\}\}$. Puesto que

$$
\begin{array}{rcl}
B \text{ y } E & : & \delta(B,a) = E \wedge \delta(E,a) = B \to E \equiv^1 B \\
 & & \delta(B,b) = D \wedge \delta(E,b) = C \to D \equiv^1 C \\
 & \Rightarrow & B \equiv^2 E \\
C \text{ y } D & : & \delta(C,a) = C \wedge \delta(D,a) = D \to C \equiv^1 D \\
 & & \delta(C,b) = F \wedge \delta(D,b) = A \to F \equiv^1 A \\
 & \Rightarrow & C \equiv^2 D \\
A \text{ y } F & : & \delta(A,a) = F \wedge \delta(F,a) = F \to F \equiv^1 F \\
 & & \delta(A,b) = B \wedge \delta(F,b) = E \to B \equiv^1 E \\
 & \Rightarrow & A \equiv^2 F
\end{array}
$$

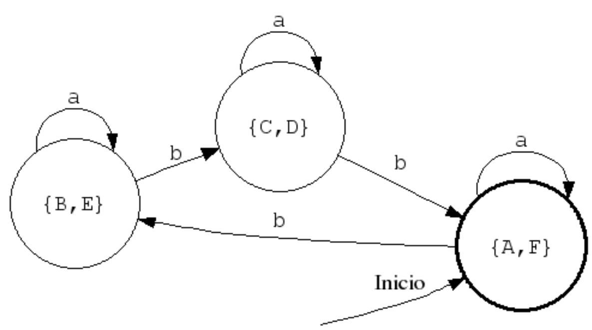
- Como $\equiv^1 = \equiv^2$ tomamos $\equiv^2$ como $\equiv$ definitiva y construimos el autómata mínimo como

$$M' = < \{\{B, E\}, \{C, D\}, \{A, F\}\}, \{a, b\}, \delta', \{A, F\}, \{\{A, F\}\} >$$

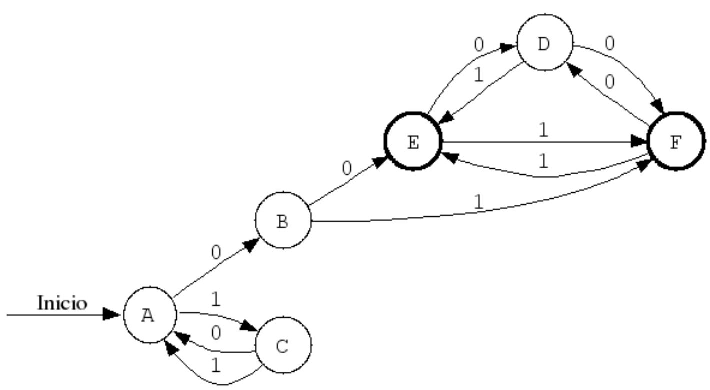
con δ' definida como

$$\begin{array}{rcl}
\delta'(\{A,F\},a) & = & \{A,F\} \\
\delta'(\{A,F\},b) & = & \{B,E\} \\
\delta'(\{B,E\},a) & = & \{B,E\} \\
\delta'(\{B,E\},b) & = & \{C,D\} \\
\delta'(\{C,D\},a) & = & \{C,D\} \\
\delta'(\{C,D\},b) & = & \{A,F\}
\end{array}$$

y obtenemos la representación gráfica



Ejemplo 3: Minimizar el DFA



En este caso no hay estados inalcazables, de manera que pasamos a calcular la relación de equivalencia:

- $\equiv^0 = \{\{A,B,C,D\},\{E,F\}\}$. Por definición, $\equiv^0$ comienza con dos clases de equivalencia: $Q \backslash F$ y F.
- $\equiv^1 = \{\{A,C\},\{B,D\},\{E,F\}\}$. Puesto que

$$\begin{array}{rcl}
A \text{ y } B & : & \delta(A,0) = B \wedge \delta(B,0) = E \rightarrow B \not\equiv^0 E \\
 & & \delta(A,1) = C \wedge \delta(B,1) = F \rightarrow C \not\equiv^0 F \\
 & \Rightarrow & A \not\equiv^1 B \\
A \text{ y } C & : & \delta(A,0) = B \wedge \delta(C,0) = A \rightarrow B \equiv^0 A \\
 & & \delta(A,1) = C \wedge \delta(C,1) = A \rightarrow C \equiv^0 A \\
 & \Rightarrow & A \equiv^1 C \\
A \text{ y } D & : & \delta(A,0) = B \wedge \delta(D,0) = F \rightarrow B \not\equiv^0 F
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & & \delta(A,1) = C \wedge \delta(D,1) = E \rightarrow C \not\equiv^0 E \\
 & \Rightarrow & A \not\equiv^1 D \\
B \text{ y } D & : & \delta(B,0) = E \wedge \delta(D,0) = F \rightarrow E \equiv^0 F \\
 & & \delta(B,1) = F \wedge \delta(D,1) = E \rightarrow F \equiv^0 E \\
 & \Rightarrow & B \equiv^1 D \\
E \text{ y } F & : & \delta(E,0) = D \wedge \delta(F,0) = D \rightarrow D \equiv^0 D \\
 & & \delta(E,1) = F \wedge \delta(F,1) = E \rightarrow F \equiv^0 E \\
 & \Rightarrow & E \equiv^1 F
\end{array}$$

- $\equiv^2 = \{\{A\},\{C\},\{B,D\},\{E,F\}\}$. Puesto que

$$\begin{array}{rcl}
A \text{ y } C & : & \delta(A,0) = B \wedge \delta(C,0) = A \rightarrow B \not\equiv^1 A \\
 & & \delta(A,1) = C \wedge \delta(C,1) = A \rightarrow C \equiv^1 A \\
 & \Rightarrow & A \not\equiv^2 C \\
B \text{ y } D & : & \delta(B,0) = E \wedge \delta(D,0) = F \rightarrow E \equiv^1 F \\
 & & \delta(B,1) = F \wedge \delta(D,1) = E \rightarrow F \equiv^1 E \\
 & \Rightarrow & B \equiv^2 D \\
E \text{ y } F & : & \delta(E,0) = D \wedge \delta(F,0) = D \rightarrow D \equiv^1 D \\
 & & \delta(E,1) = F \wedge \delta(F,1) = E \rightarrow F \equiv^1 E \\
 & \Rightarrow & E \equiv^2 F
\end{array}$$

- $\equiv^3 = \{\{A\},\{C\},\{B,D\},\{E,F\}\}$. Puesto que

$$\begin{array}{rcl}
B \text{ y } D & : & \delta(B,0) = E \wedge \delta(D,0) = F \rightarrow E \equiv^2 F \\
 & & \delta(B,1) = F \wedge \delta(D,1) = E \rightarrow F \equiv^2 E \\
 & \Rightarrow & B \equiv^3 D \\
E \text{ y } F & : & \delta(E,0) = D \wedge \delta(F,0) = D \rightarrow D \equiv^2 D \\
 & & \delta(E,1) = F \wedge \delta(F,1) = E \rightarrow F \equiv^2 E \\
 & \Rightarrow & E \equiv^3 F
\end{array}$$

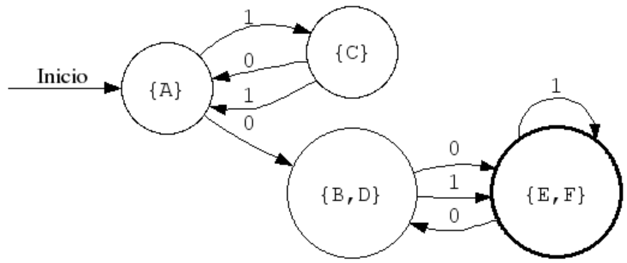
- Como $\equiv^2 = \equiv^3$ tomamos $\equiv^3$ como $\equiv$ definitiva y construimos el autómata mínimo como

$$M' = < \{\{A\},\{C\},\{B,D\},\{E,F\}\}, \{0,1\}, \delta', \{A\}, \{\{E,F\}\} >$$

con δ' definida como

$$\begin{array}{rcl}
\delta'(\{A\},0) & = & \{B,D\} \\
\delta'(\{A\},1) & = & \{C\} \\
\delta'(\{C\},0) & = & \{A\} \\
\delta'(\{C\},1) & = & \{A\} \\
\delta'(\{B,D\},0) & = & \{E,F\} \\
\delta'(\{B,D\},1) & = & \{E,F\} \\
\delta'(\{E,F\},0) & = & \{B,D\} \\
\delta'(\{E,F\},1) & = & \{E,F\}
\end{array}$$

y obtenemos la representación gráfica


Inicio
{A}
{C}
{B,D}
{E,F}
1
0
1
0
0
1
0
1